

## Vorläufige Mitteilungen - Communications provisoires Comunicati provvisori - Preliminary reports

Für die vorläufigen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. — Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. — Per i comunicati provvisori è responsabile solo l'autore. — The Editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

### Ein Unabhängigkeitssatz für irreduzible Integrale

Es ist durch J. LIOUVILLE bewiesen worden, daß Integrale verschiedener Funktionen, wie z. B.

$$w = \int \frac{dx}{\lg x}, \quad (1)$$

nicht durch elementare Funktionen darstellbar sind<sup>1</sup>, daß also die üblichen Integrationskunstgriffe bei ihnen versagen *müssen*. Nennt man eine Funktion, die sich aus

$$\lg x, e^x, \sin x, \dots, \operatorname{ctg} x, \operatorname{arcsin} x, \dots, \operatorname{arctg} x, \text{ algebr. Funkt.} \quad (2)$$

durch endlich oftmaliges Ineinandersetzen und beliebige rationale Operationen bilden läßt, allgemein eine *elementare Funktion*, so kann man also sagen, daß (1) nicht elementar ist.

Es bleibt noch die Frage übrig, ob nicht ein Integral, wie (1) z. B., sich «implizite» durch Lösung einer Gleichung

$$F(w, x) = 0 \quad (3)$$

bestimmen läßt, wo  $F$  eine sogenannte *elementare Funktion von zwei Variablen*  $w, x$  ist, also durch endlich oftmalige Benutzung der elementaren Funktionen (2) gebildet werden kann. Diese Frage hat J. F. RITT<sup>2</sup> verneint, indem er zeigte, daß, wenn ein Integral einer elementaren Funktion einer Gleichung vom Typus (3) genügt, dieses Integral selbst elementar ist.

Nicht elementare Integrale elementarer Funktionen wollen wir *irreduzible Integrale* nennen. Man wird nun fragen, in welchem Maße die Benutzung von *gegebenen* irreduziblen Integralen als neue Transzendente das Integrationsgeschäft erleichtert, ob also, wenn z. B.

$$\varphi_\nu(x) = \int \varphi_\nu(x) dx \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (4)$$

irreduzible Integrale sind, man mit ihrer Hilfe und mit Hilfe beliebiger elementarer Funktionen weitere irreduzible Integrale darstellen kann.

Man kann nun beweisen, daß dies auf jeden Fall im folgenden Sinne unmöglich ist: Wenn ein irreduzibles Integral

$$\psi(x) = \int \varphi(x) dx$$

durch die Funktionen (4) und elementare Funktionen darstellbar ist, kann  $\psi$  *linear* aus (4) zusammengesetzt werden, so daß für geeignete numerische Konstanten  $\alpha_\nu$  die Relation

$$\psi(x) = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = \int (\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n) dx \quad (5)$$

gilt. — Dies folgt aus dem folgenden Satz, den wir als den *Unabhängigkeitssatz für irreduzible Integrale* bezeichnen:

Gilt für  $n > 1$  *irreduzible Integrale* (4)

$$F(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x) = 0, \quad (6)$$

wo  $F(w_1, \dots, w_n, x)$  eine *elementare Funktion* der  $n+1$  Variablen  $w_1, \dots, w_n, x$  ist, so ist dann für geeignete numerische, nicht sämtlich verschwindende Konstanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die *Summe* (5) *elementar*<sup>1</sup>.

Dabei wird vorausgesetzt, daß  $F$  für

$$w_1 = \varphi_1(x), \dots, w_n = \varphi_n(x), x \quad (7)$$

in der Umgebung eines  $x$ -Wertes nicht nur selbst regulär ist, sondern auch, wie wir sagen, *regulär aufgebaut* ist — dies bedeutet, daß die zum Aufbau von  $F$  als Durchgangsstufen benutzten Funktionen gleichfalls an den Stellen (7) regulär sind. — Die obige Formulierung des Unabhängigkeitssatzes läßt sich noch in verschiedenen Richtungen erweitern.

A. OSTROWSKI

Mathematisches Seminar der Universität Basel, den 18. Juli 1945.

### Summary

Let  $\varphi_\nu(x)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) be  $n$  elementary functions, such that the integrals  $\varphi_\nu(x) = \int \varphi_\nu dx$  are not elementary. Then, if there exists a relation  $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x) = 0$  with an elementary function  $F(W_1, \dots, W_n, x)$  of its  $n+1$  variables, there exists also a *linear* relation

$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \varphi_\nu(x) = \psi(x)$  where  $\alpha_\nu$  are constants and  $\psi(x)$  is an elementary function.

<sup>1</sup> Hierin ist insbesondere der oben erwähnte RITTSche Satz als Spezialfall enthalten.

### Über Lyco-marasmin, den Welkstoff aus *Fusarium lycopersici* SACC.

Es wurde schon lange vermutet, daß bei den durch Pilzbefall verursachten pflanzlichen Welkekrankheiten von den Pilzen ausgeschiedene toxische Stoffwechselprodukte eine wichtige Rolle spielen. Vor kurzem ist es uns gelungen, aus Kulturen des Erregers der Tomatenwelke (*Fusarium lycopersici* SACC.) erstmals eine chemisch einheitliche Substanz zu isolieren, die in vitro

<sup>1</sup> LIOUVILLE, J., J. f. d. r. u. a. Math. 13, 93—118 (1835).

<sup>2</sup> RITT, J. F., Trans. Am. Math. Soc. 25, 211—222 (1923).